Références :
*Algèbre*, Xavier Gourdon

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

**Prop.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $f$. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} ... M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme $F$. Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, on note $N_i = Ker M_i^{\alpha_i}(f)$. On a alors $E = N_1 \bigoplus ... \bigoplus N_s$, et pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, la projection sur $N_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en $f$.*

*Démonstration.* On a, d'après le lemme des noyaux, $E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$. Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, notons $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$. Aucun facteur n'est commun à tous les $Q_i$ ie $pgcd(Q_1, ..., Q_s) = 1$. En appliquant l'égalité de Bezout, on voit qu'il existe $U_1, ..., U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_1 Q_1 + ... + U_s Q_s = 1$ de sorte que

$$Id_E = U_1(f) \circ Q_1(f) + ... + U_s(f) \circ Q_s(f).$$

Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, on pose $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(f)$. On a

$$Id = \sum_{i=1}^{s} p_i \quad (*).$$

Par ailleurs, pour tout $j \neq i$, $F$ divise $Q_i Q_j$ donc

$$\begin{aligned} \forall j \neq i, p_i \circ p_j &= U_i Q_i(f) \circ Q_j U_j(f) \\ &= U_i U_j(f) \circ Q_i Q_j(f) \\ &= 0 \quad (**) \end{aligned}$$

On déduit de (*) que pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $p_i = \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j$ et donc d'après (**), $p_i = p_i^2$. Les $p_i$ sont donc des projecteurs.

- Montrons que, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $Im(p_i) = N_i$.

  Soit $y = p_i(x) \in Im(p_i)$. On a

  $$\begin{aligned} M_i^{\alpha_i}(y) &= M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) \\ &= M_i^{\alpha_i}(f) \circ U_i Q_i(f)(x) \\ &= U_i(f) f \circ F(f)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  ce qui prouve que $Im(p_i) \subset Ker M_i^{\alpha_i}(f) = N_i$.
  Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in N_i = Ker M_i^{\alpha_i}(f)$. D'après (*), $x = p_1(x) + ... + p_s(x)$. Or, pour tout $j \neq i$, $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i}$ divise $Q_j$, donc finalement $x = p_i(x) \in Im(p_i)$. Donc $Im(p_i) = N_i$.

- Il ne reste plus qu'à montrer que pour tout $i \in [\![1, s]\!]$,

  $$Ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j.$$

  Pour tout $j \neq i$, on a $N_j \subset Ker(p_i)$ car si $x \in N_j$, alors

  $$p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$$

  car $M_j^{\alpha_j}$ divise $Q_i$. On en déduit que $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset Ker(p_i)$.
  Soit maintenant $x \in Ker(p_i)$. D'après (*), $x = \sum_{j \neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Finalement, $Ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

La démonstration est terminée puisque par construction, les projecteurs $p_i$ sont des polynômes en $f$. □

**Théo.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique $P_f$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n)$ d'endomorphismes tels que*

*(i) $d$ est diagonalisable et $n$ est nilpotente.*

*(ii) $f = d + n$.*

*(iii) $d \circ n = n \circ d$.*

*De plus, $d$ et $n$ sont des polynômes en $f$.*

*Démonstration.*

- **Existence** : Ecrivons $\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, notons $N_i = Ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i}$. On applique la proposition précédente pour $F = \chi_f$ et pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $M_i = (X-\lambda_i)$. En utilisant les notations précédentes, pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $p_i = P_i(f)$ est le projecteur sur $N_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$. Posons $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ qui est diagonalisable car $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$ et $p_i$ est diagonalisable, pour tout $i,j \in [\![1,s]\!]$. Ainsi, les $p_i$ sont codiagonalisables.
  Posons $n = f - d$. On a, pour tout $i \in [\![1,s]\!]$,
  $$n_{|N_i} = f_{|N_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_i}.$$
  On a donc $n_{|N_i}^{\alpha_i} = 0$. De plus, comme $E = \bigoplus_{i=1}^{s}$, en posant $q = \max\limits_{i\in[\![1,s]\!]} \alpha_i$, on obtient que $n$ est nilpotent d'indice inférieur ou égal à $q$.
- **Unicité** : Supposons qu'il existe $(d', n')$ un autre couple d'endomorphismes vérifiant les conditions du théorème. On a donc
  $$f = d + n = d' + n'.$$
  $d'$ commute avec $d'$ et $n'$ donc commute avec $f$ donc $d'$ commute avec $d$. De même, $n'$ commute avec $n$. Donc $d$ et $d'$ sont codiagonalisables. Ainsi, $d - d'$ est diagonalisable et $n' - n$ est nilpotente. Donc
  $$d - d' = n' - n = 0.$$

□

Leçons possibles : 153 - 155 - 157